PESEL: | | | | | | | | | | | |

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Egzamin wstępny na studia II stopnia na kierunku INFORMATYKA

30 czerwca 2012 roku

Czas rozwiązywania: 150 minut

W każdym spośród 30 zadań podane są trzy warianty: (a), (b) oraz (c). W kratce przy każdym z wariantów należy odpowiedzieć, czy jest on prawdziwy, wpisując drukowanymi literami **TAK** *albo* **NIE**. *W przypadku omyłkowego wpisu kratkę należy przekreślić i napisać jedno z tych słów po jej lewej stronie.*

Przykład poprawnego rozwiązania zadania

4. Każda liczba całkowita postaci $10^n - 1$, gdzie n jest całkowite i dodatnie,

TAK (a) dzieli się przez 9;
NIE (b) jest pierwsza;
TAK (c) jest nieparzysta.

Na stronach testu można pisać wyłącznie we wskazanych wyżej miejscach i jedynie słowa **TAK** *oraz* **NIE**. *Pisać należy długopisem lub piórem.*

Zasady punktacji

Zdający zdobywa punkty "duże"(od 0 do 30) i punkty "małe"(od 0 do 90):

- *jeden punkt "duży" kandydat uzyskuje za zadanie, w którym poprawnie wskazał prawdziwość albo fałsz każdego z trzech związanych z tym zadaniem wariantów odpowiedzi;*
- *jeden punkt "mały" kandydat uzyskuje za każde poprawne wskazanie prawdziwości albo fałszu pojedynczego wariantu odpowiedzi. Oznacza to, że 3 "małe" punkty uzyskane w jednym zadaniu składają się na jeden "duży" punkt.*

Ostatecznym wynikiem egzaminu jest liczba

$$W = D + m/100$$

gdzie D oznacza liczbę "dużych", a m liczbę "małych" punktów. Na przykład: 5,50 oznacza, że kandydat poprawnie wskazał w całym teście prawdziwość albo fałsz łącznie 50 wariantów odpowiedzi, w tym każdego z trzech wariantów dla pewnych pięciu zadań.

Zasadniczą rolę w ostatecznym wyniku testu mają punkty "duże". Punkty "małe" zwiększają rozdzielczość, jeśli wielu kandydatów dostało tyle samo "dużych" punktów.

Powodzenia!

1. Ciąg określony dla $n \geq 1$ wzorem $\left(1+\frac{1}{4^n}\right)^{(2^n)}$ jest

- [ ] (a) zbieżny do 1;
- [ ] (b) rosnący, począwszy od pewnego miejsca;
- [ ] (c) ograniczony.

2. Funkcja $f : (0;1) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x) = \sqrt{|\sin x|}$

- [ ] (a) jest różniczkowalna;
- [ ] (b) jest ciągła i osiąga swój kres górny;
- [ ] (c) ma pochodną ograniczoną.

3. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest zadana wzorem $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. Wynika z tego, że

- [ ] (a) funkcja f jest ograniczona na $\mathbb{R}$;
- [ ] (b) funkcja f jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$;
- [ ] (c) spełniona jest nierówność $16 > f'(0) > \frac{1}{16}$.

4. W przestrzeni liniowej $\mathcal{P}^3_{|\mathbb{R}}$ wielomianów rzeczywistych stopnia mniejszego niż 3 dane są wielomiany

$$p_1(t) = 1, \quad p_2(t) = 1 + t^2, \quad p_3(t) = 1 + t + t^2.$$

Wynika z tego, że

- [ ] (a) układ (p_1, p_2, p_3) stanowi bazę przestrzeni $\mathcal{P}^3_{|\mathbb{R}}$;
- [ ] (b) jeśli $q(t)$ jest wielomianem stopnia pierwszego, to układ (p_1, p_2, q) jest liniowo niezależny;
- [ ] (c) macierz $A = (p_i(j))^3_{i,j=1}$ jest nieosobliwa.

5. Niech $\mathbb{R}^3$ będzie przestrzenią euklidesową ze zwykłym iloczynem skalarnym $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ i niech $\mathcal{Y}$ będzie podprzestrzenią wszystkich $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ spełniających układ równań

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Wynika z tego, że

- [ ] (a) zbiór wektorów prostopadłych do $\mathcal{Y}$ jest podprzestrzenią o wymiarze 1;
- [ ] (b) istnieje prostopadły do $\mathcal{Y}$ wektor $\vec{z} \neq \vec{0}$, dla którego $z_1 = z_3$;
- [ ] (c) rzutem prostopadłym wektora $[1, 0, -1]^T$ na podprzestrzeń $\mathcal{Y}$ jest wektor zerowy.

6. Niech A będzie dowolnym zbiorem i niech $s, r \subseteq A \times A$ będą relacjami. Jeśli s i r są

- [ ] (a) zwrotne, to $s \cup r$ jest relacją zwrotną;
- [ ] (b) symetryczne, to $s \cup r$ jest relacją symetryczną;
- [ ] (c) przechodnie, to $s \cup r$ jest relacją przechodnią.

7. Zbiór A ma moc $\aleph_0$. Wynika z tego, że w częściowym porządku $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$

- [ ] (a) każdy podzbiór ma kres górny;
- [ ] (b) istnieje łańcuch o mocy continuum;
- [ ] (c) istnieje antyłańcuch o mocy continuum.

8. Niech $f : A \to B$ będzie funkcją „na” B i niech s_A będzie relacją równoważności na A. Przez $f^{-1}(X)$ oznaczamy przeciwobraz X przy f. Następująca relacja r jest relacją równoważności na B:

- [ ] (a) $b \; r \; b'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(\{b\}) \cup f^{-1}(\{b'\})$ jest pewną klasą abstrakcji relacji s_A;
- [ ] (b) $b \; r \; b'$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, a' \in A$ takie, że $a \in f^{-1}(\{b\})$ i $a' \in f^{-1}(\{b'\})$ oraz $a \; s_A \; a'$;
- [ ] (c) $b \; r \; b'$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $a, a' \in A$ takich, że $a \in f^{-1}(\{b\})$ i $a' \in f^{-1}(\{b'\})$, zachodzi $a \; s_A \; a'$.

9. Funkcją tworzącą $A(x)$ ciągu $\langle (n+1)2^n \rangle_{n=0}^{\infty}$ jest

- [ ] (a) $\dfrac{1}{(1-2x)(1-x)}$;
- [ ] (b) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{1-2x}$;
- [ ] (c) $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-2t}$.

10. Graf G ma cykl Eulera, ale nie ma cyklu Hamiltona. Wynika z tego, że

- [ ] (a) dopełnienie grafu G ma cykl Hamiltona;
- [ ] (b) G ma ścieżkę Hamiltona;
- [ ] (c) G ma więcej niż jedną dwuspójną składową.

11. Istnieje przestrzeń probabilistyczna Ω i zdarzenia $A, B \subseteq \Omega$ takie, że $P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$ oraz

- [ ] (a) A i B są niezależne;
- [ ] (b) $P(A|B) = \frac{1}{3}$;
- [ ] (c) $P(A|B) \neq P(B|A)$;

12. Ciąg $\delta = \langle \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \rangle$ nazywamy k-uporządkowanym rosnąco, gdy każdy jego podciąg złożony z elementów odległych o k jest uporządkowany rosnąco, tzn. $\delta_i < \delta_{i+k}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-k$. Ciąg δ można uporządkować wykonując $O(n)$ porównań, gdy jest on

- [ ] (a) jednocześnie 2- i 3-uporządkowany;
- [ ] (b) 2012-uporządkowany;
- [ ] (c) $\lfloor \log n \rfloor$-uporządkowany.

13. W zbiorze AVL-drzew o 10 węzłach

- [ ] (a) istnieje drzewo o wysokości (czyli największej liczbie *krawędzi* od korzenia do liścia) równej 4;
- [ ] (b) każde drzewo ma wysokość co najmniej 3;
- [ ] (c) maksymalna różnica liczb węzłów podrzew korzenia wynosi 5.

14. Relacja R ma kolumny A, B, C, D, E i zależności funkcyjne $A \to BC$, $CA \to D$, $B \to E$. Wynika z tego, że

- [ ] (a) relacja R ma dokładnie trzy klucze;
- [ ] (b) relacja R jest w trzeciej postaci normalnej;
- [ ] (c) schemat relacji R daje się sprowadzić do postaci Boyce'a-Codda z zachowaniem zależności funkcyjnych i informacji.

15. Dane są relacje R i Q, każda zawierająca dokładnie n krotek. Wynika z tego, że relacja $R \bowtie Q$ (złączenie naturalne R i Q) ma

- [ ] (a) co najmniej n krotek;
- [ ] (b) co najwyżej n^2 krotek;
- [ ] (c) dokładnie $2n$ krotek.

16. Regularny jest język nad alfabetem $\{a, b\}$ złożony ze wszystkich słów, w których każde podsłowo

- [ ] (a) długości trzy występuje parzystą liczbę razy;
- [ ] (b) długości większej niż trzy występuje parzystą liczbę razy;
- [ ] (c) występuje również jako prefiks.

17. Problem stopu dla maszyn Turinga jest

- [ ] (a) w klasie NP;
- [ ] (b) częściowo rozstrzygalny;
- [ ] (c) rozstrzygalny.

18. Dla języka L, niech $\Psi(L)$ oznacza zbiór długości słów z języka L. Istnieje taki język bezkontekstowy L, dla którego $\Psi(L)$ jest zbiorem

- [ ] (a) liczb naturalnych podzielnych przez 11;
- [ ] (b) kwadratów liczb naturalnych;
- [ ] (c) sześcianów liczb naturalnych.

19. W grafie przydziału zasobów istnieje cykl. Wynika z tego, że

- [ ] (a) system jest w stanie blokady;
- [ ] (b) system jest w stanie bezpiecznym;
- [ ] (c) istnieje proces oczekujący na zasoby.

20. Procesy P_1 i P_2 są synchronizowane algorytmem Petersona. Wynika z tego, że

(a) P_1 i P_2 wchodzą do sekcji krytycznej na zmianę;

(b) P_1 wejdzie kiedyś do sekcji krytycznej;

(c) w dowolnym momencie w sekcji krytycznej przebywa co najwyżej jeden proces.

21. Zmienna `x` jest zmienną globalną o wartości początkowej 0. W systemie wykonują się współbieżnie dwa procesy o następującej treści:

```
process P;
var i: integer;
begin
  for i := 1 to 5 do x := x + 1;
end;
```

Po zakończeniu wykonania obu procesów wartość zmiennej `x` jest

(a) równa 10;

(b) niemniejsza niż 5;

(c) mniejsza niż 10.

22. Dany jest program w C++:

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;
class A {
public:
   void m1(){ cout << 'A'; }
   virtual void m2(){ cout << 'B'; }
   virtual void m3(){ cout << 'C'; }
};

class B: public A {
public:
   void m1(){ cout << 'D'; }
   void m2(){ cout << 'E'; }
};

class C: public B {
public:
   void m3(){ cout << 'F'; }
};

int main() {
   A* a = new B();
   a->m1();
   a->m2();
   a->m3();
}
```

(a) Wywołanie metody a->m1() spowoduje wypisanie znaku A.

(b) Wywołanie metody a->m2() spowoduje wypisanie znaku B.

(c) Wywołanie metody a->m3() spowoduje wypisanie znaku C.

23. Rozważamy programy napisane w Javie. Jeżeli klasa A jest nadklasą B, to w treści klasy B

- [ ] (a) trzeba zdefiniować wszystkie metody zdefiniowane w klasie A;
- [ ] (b) można zdefiniować metody o innych nagłówkach niż metody zdefiniowane w klasie A;
- [ ] (c) można zdefiniować metodę o takim samym nagłówku jak metoda zdefiniowana w klasie A, ale z węższą widocznością niż była podana w metodzie z klasy A.

24. W strukturze relacyjnej, której nośnikiem jest zbiór liczb całkowitych, a wszystkie symbole operacji i relacji mają standardowe znaczenie, formuła logiki Hoare'a

$$\{\mathtt{x} < \mathtt{a}\}\ \mathtt{while}\ \mathtt{x} \neq 0\ \mathtt{do}\ \mathtt{x} := \mathtt{x} + 1\ \{\mathtt{x} = 0\}$$

- [ ] (a) jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathtt{a} = 1$;
- [ ] (b) jest prawdziwa dla $\mathtt{a} = 1$;
- [ ] (c) jest prawdziwa dla każdego $\mathtt{a}$.

25. Dana jest funkcja

```
function coto(n:Integer):Integer;
begin
  if n=0 then coto := 1
  else if n>0 then coto := coto(n-1)+coto(-n)
       else coto:=coto(n+1)-1
end;
```

Przypisanie `y:=coto(x)` spowoduje, że będzie zachodzić zależność

- [ ] (a) $|\mathtt{y}| \geq |\mathtt{x}|$;
- [ ] (b) $\mathtt{y} \leq 1$;
- [ ] (c) jeśli $\mathtt{x} = -2012$, to $\mathtt{y} = -2011$.

26. Dla danego stylu (nie są stosowane żadne inne style):

```
div {color: yellow;}
div p {color: red;}
div.p {color: green;}
p#id {color: green;}
.x#id {color: black;}
```

i fragmentu HTML

```
<body><div class="x"><p id="id">XXX</p><p>YYY</p>ZZZ</div></body>
```

- [ ] (a) napis XXX ma kolor zielony;
- [ ] (b) napis YYY ma kolor czerwony;
- [ ] (c) napis ZZZ ma kolor żółty.

27. W czterech kolejnych bajtach pamięci, począwszy od adresu X, znajdują się odpowiednio wartości 1, 3, 5 i 7. Procesor cienkokońcówkowy (ang. *little-endian*) wczytał 32-bitową liczbę spod adresu X, odjął od niej $(16)_{10}$ i zapisał wynik pod adresem X. Po tych operacjach bajt o adresie

- [ ] (a) X zawiera wartość $(\mathrm{F1})_{16}$;
- [ ] (b) $X + 1$ zawiera wartość $(03)_{16}$;
- [ ] (c) $X + 2$ zawiera wartość $(05)_{16}$.

28. Pewien procesor używa jednopoziomowego mechanizmu stronicowania. Rozmiar tablicy stron jest równy rozmiarowi strony. Jeden wpis w tablicy stron zajmuje 4 bajty. Adres wirtualny ma 32 bity. Wynika z tego, że w tym procesorze

- [ ] (a) strona ma rozmiar 4 KiB;
- [ ] (b) górne ograniczenie na rozmiar pamięci fizycznej wynosi 4 GiB;
- [ ] (c) procesowi można przydzielić co najwyżej 32768 stron.

29. W nagłówku TCP znajduje się

- [ ] (a) numer portu nadawcy;
- [ ] (b) adres IP odbiorcy;
- [ ] (c) 32-bitowy numer kolejny pakietu.

30. Od kryptograficznej funkcji skrótu f wymagamy, aby dla danego x trudne obliczeniowo było znalezienie takiego $y \neq x$, że

- [ ] (a) $f(f(y)) = x$;
- [ ] (b) $f(x) = f(y)$;
- [ ] (c) $f(y) = x$.